Diese Funktion ist mein Typ!

Überblick über die wichtigsten Funktionstypen der 10.Jgst.:

Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
Ganzrationale Funktionen
Gebrochen-rationale Funktionen
Trigonometrische Funktionen
Exponentialfunktionen

Eine Projektarbeit der Klasse 10b
des Ammersee-Gymnasiums
im Schuljahr 2010/11

Lineare Funktionen

(ganzrationale Funktion ersten Grades)

1. Allgemeine Form

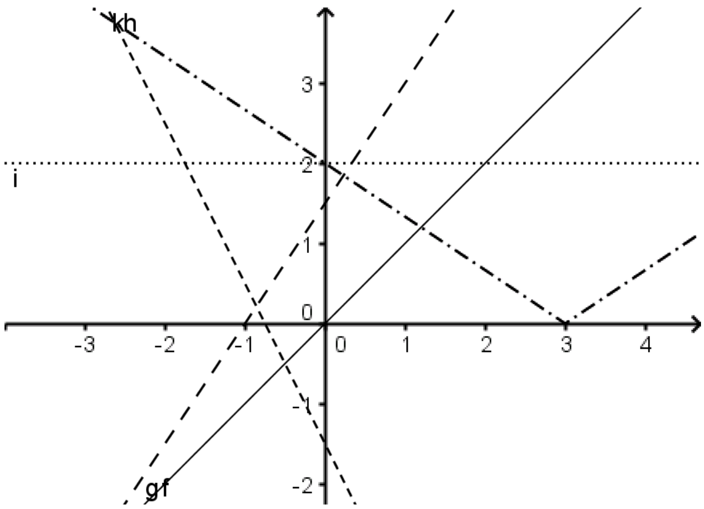
$$\boxed{f(x) = m \cdot x + t}$$

- m ist die Steigung (m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$)
    - wenn m < 0: fallende Gerade
    - wenn m = 0: Parallele zur x-Achse
    - wenn m > 0: steigende Gerade

- t ist der y-Achsenabschnitt
    - wenn t = 0: Ursprungsgerade (proportionale Zuordnung)

2. Charakteristische Eigenschaften

- Für betragsmäßig große x-Werte verläuft der Graph ins positiv oder negativ Unendliche (außer für m = 0)
- Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn t = 0
  Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn m = 0



3. Beispiele

f(x) = x

g(x) = $\frac{3}{2} \cdot x + 1{,}5$

h(x) = $|\frac{2}{3} \cdot x - 2|$

k(x) = $-2 \cdot x - 1{,}5$

i(x) = 2

4. Vom Term zum Graphen

- Trage den y-Achsenabschnitt ein und zeichne von dort aus das Steigungsdreieck, anschließend die Punkte durch eine Gerade verbinden.

Beispiel g(x)= $\frac{3}{2} \cdot x + 1{,}5$ (s. Grafik)

- y-Achsenabschnitt bei 1,5 einzeichnen
- Steigungsdreieck („eins nach rechts, 1,5 nach oben“) ergänzen

5. Vom Graphen zum Term

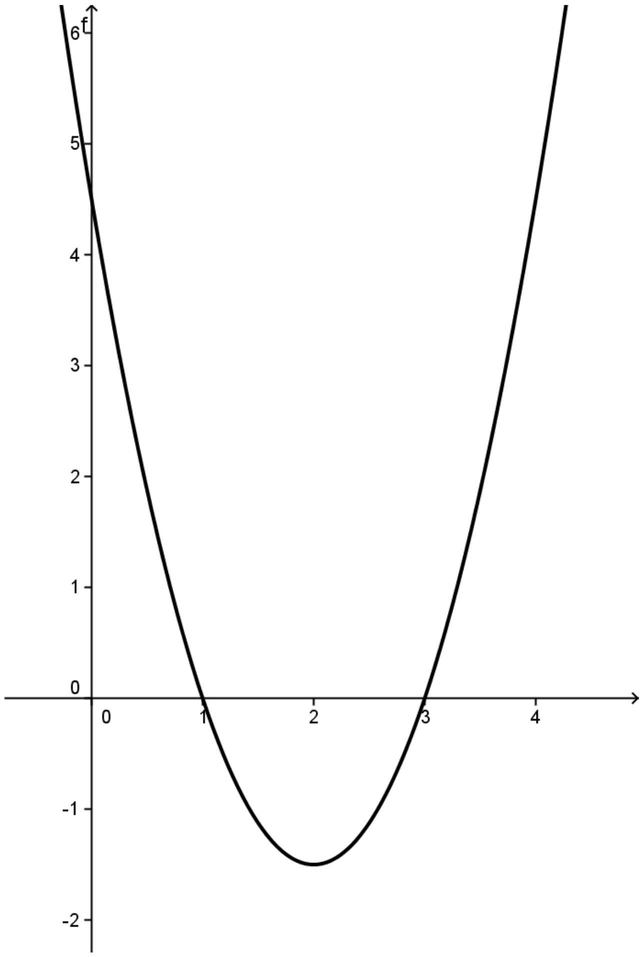
- Steigung mit Steigungsdreieck ablesen, Vorzeichen je nach Graph-Verhalten setzen und anschließend y-Achsenabschnitt ablesen
    - Beispiel g(x) am Graphen
- passendes Steigungsdreieck finden
- y-Achsenabschnitt lesen und mit richtigem Vorzeichen einfügen

Quadratische Funktionen

(ganzrationale Funktion zweiten Grades)

1. Darstellungsformen:

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelform: $f(x) = a(x-d)^2 + e$
Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$



2. Charakteristische Eigenschaften:

- Verlauf: von links oben nach rechts oben oder für $a < 0$ von links unten nach rechts unten
- Graph parabelförmig
- Normalparabel verläuft durch die Punkte (-1/1), (0/0) und (1/1)
- Nullstellenermittlung durch Mitternachts - formel
  Symmetrieeigenschaften: senkrechte Gerade durch den Scheitelpunkt ist die Symmetrieachse

3. Vom Graph zum Term:

Scheitelform: $f(x) = a(x-d)^2 + e$

d = x-Koordinate vom Scheitelpunkt
e = y-Koordinate vom Scheitelpunkt
a = Dehnungsfaktor in y-Richtung

Ermittlung des Funktionsterms mit Hilfe der Scheitelpunktsform: $f(x) = a\,(x-2)^2 -1{,}5$
Bestimmung von **a** durch Einsetzen: z.B. Punkt P(3/0), der auf dem Graph liegt
$y = a\,(x-d)^2 + e$
$\rightarrow 0 = a(3-2)^2-1{,}5$
$\underline{\mathbf{a} = 1{,}5}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) = 1{,}5\,(x-2)^2 -1{,}5}$

Ermittlung des Funktionsterms in Nullstellenform: $f(x) = a*(x - x_1)(x - x_2)$
1,5 = Vorfaktor
$x_1 =$ 1 (1. Nullstelle bei 1)
$x_2 =$ 3 (2. Nullstelle bei 3)

$\rightarrow$ **$f(x) = 1{,}5*(x-1)(x-3)$**

4. Vom Term zum Graph:

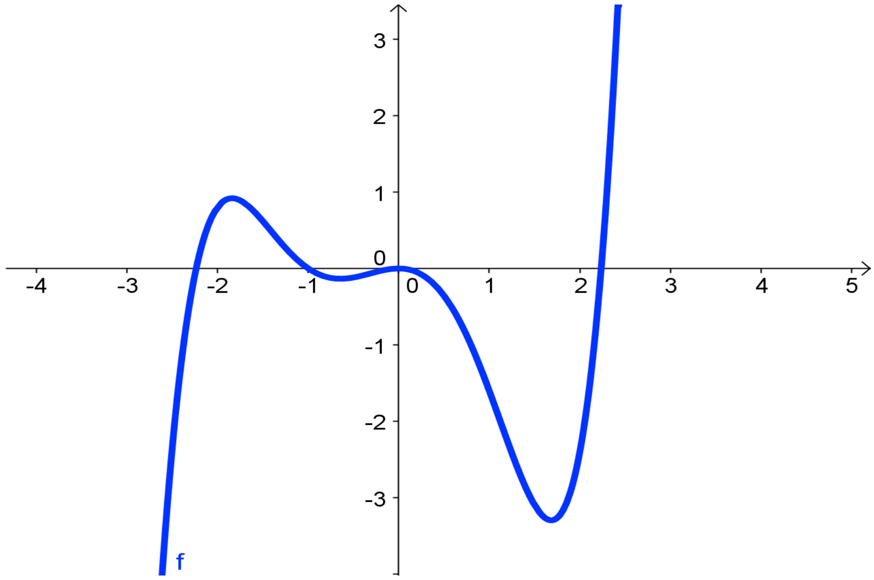
$f(x)= ax^2 + bx + c$
Anwenden der Mitternachtsformel $\rightarrow$ Nullstellen
Mittelwert der Nullstellen ist x-Koordinate des Scheitelpunkts

Ganzrationale Funktionen

1.Allgemeine Form: f(x)= $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$

2.Beispielgraph: f(x)= $\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{5} x^4 - x^3 - x^2$

3.Nullstellenform: f(x)= $\frac{1}{5} x^2 (x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$



4.Charakteristischer Verlauf:
- Von links unten nach rechts oben: Wenn der Grad der Funktion ungerade und der zugehörige Koeffizient positiv ist
- Von links unten nach rechts unten: Wenn der Grad der Funktion gerade und der zugehörige Koeffizient negativ ist
- Von links oben nach rechts oben: Wenn der Grad der Funktion gerade und der zugehörige Koeffizient positiv ist
- Von links oben nach rechts unten: Wenn der Grad der Funktion ungerade und der zugehörige Koeffizient negativ ist

5.Vom Term zum Graph:
- Funktionsterm so weit wie möglich faktorisieren
  (Ausklammern, Anwendung binomischer Formeln, evtl. Nst. Durch Probieren finden und Polynomdivision, Mitternachtsformel)
- Aus der faktorisierten Form kann man die Nullstellen herauslesen
- Evtl. zusätzliche x-Werte einsetzen, um weitere Punkte des Graphen zu ermitteln

6.Vom Graph zum Term:
- Vom Graphen die Nullstellen ablesen
- In die Nullstellenform einfügen
- Evtl. Vorfaktor in der Nullstellenform durch Punktprobe ermitteln

7.Symmetrische Eigenschaften:
- Achsensymmetrie zur y-Achse, wenn f(-x) = f(x)
  (bei ausschließlich geraden Exponenten)
- Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn f(-x) = -f(x)
  (bei ausschließlich ungeraden Exponenten)

Gebrochen-rationale Funktionen

1. Allgemeine Form

f(x)= $\frac{g(x)}{h(x)}$ (wobei g(x) und h(x) ganzrationale Funktionen sind)

2. Charakteristische Eigenschaften

a) Definitionsmenge: Die Werte für x, bei dessen Einsetzung der Nenner h(x) Null wird, sind Definitionslücken.

b) Asymptoten: senkrechte Asymptoten bei den Definitionslücken

waagrechte Asymptote: y = a, wenn sich die Funktion für betragsmäßig große x-Werte einem bestimmten Wert a annähert, d.h. wenn $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

c) Symmetrie: Herrscht bei den Graphen der Funktionen im Zähler und im Nenner die **gleiche Symmetrie**, so ist der Graph der gebrochen-rationalen Funktion **achsensymmetrisch.**

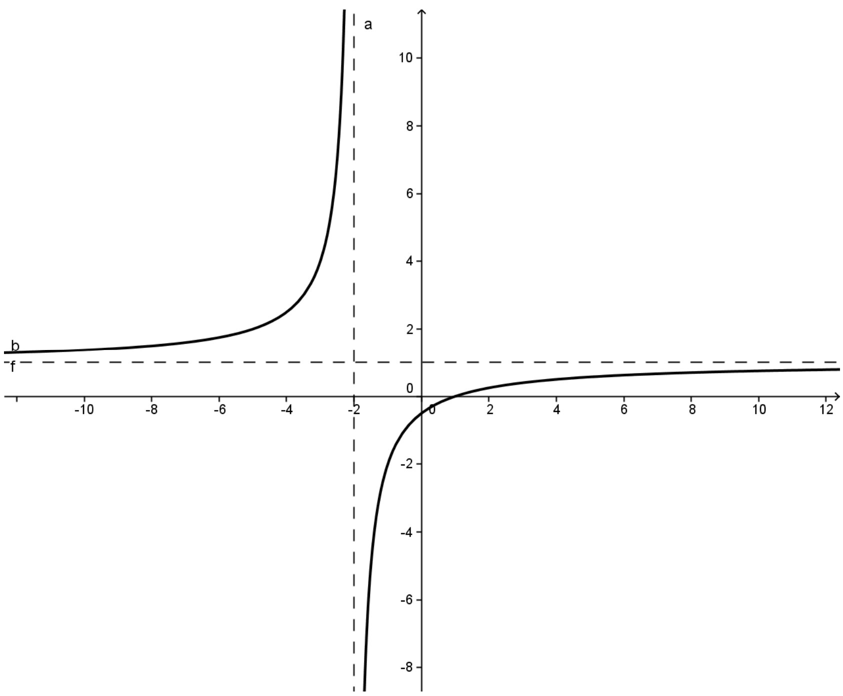
Sind diese jedoch **unterschiedlicher Symmetrie**, ist der Graph der gebrochen-rationalen Funktion **punktsymmetrisch.**

Ist im Zähler oder Nenner eine Funktion, deren Graph **keine Symmetrie** besitzt, so ist auch der Graph der gebrochen-rationalen Funktion **nicht symmetrisch.**

d) Nullstelle: Setzt man die Funktion gleich Null, so erhält man die Nullstelle.

Bsp.: f(x) = $\frac{x-1}{x+2}$ = 0 $/ \cdot (x+2)$

x - 1 = 0, d.h. Nullstelle: x = 1



3. Vom Term zum Graph

Polstelle x=-2 ablesen (senkrechte Asymptote x = -2),

Nullstelle x=1 ablesen,

Ansatz: f(x) = $\frac{x-1}{x+2}$

→ Mit Punktprobe prüfen

Anmerkung:
Wegen $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x}{1+2/x} = 1$ besitzt der abgebildete Graph die waagrechte Asymptote y = 1.

Trigonometrische Funktionen

1. Allgemeine Form

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

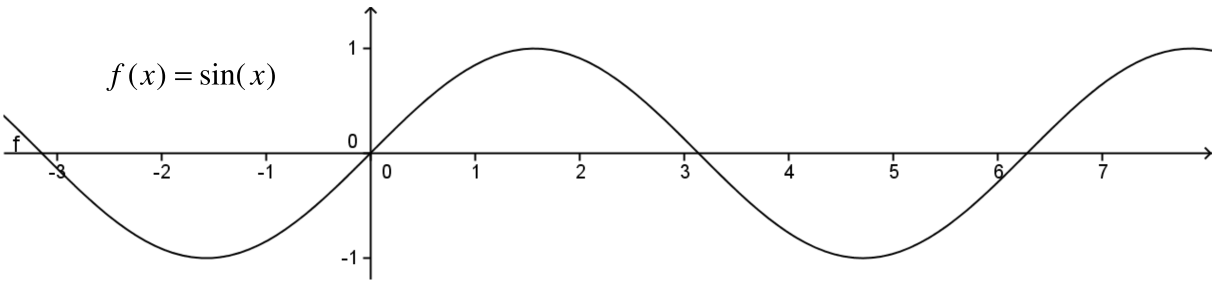
2. Transformationen

1. b bewirkt eine Streckung der Sinuskurve in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$, die **Periodenlänge** beträgt $\frac{2\pi}{b}$
2. c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung um $\frac{c}{b}$ nach links
3. a bewirkt eine Streckung mit Faktor a in y-Richtung, $|a|$ ist die **Amplitude**
4. d bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung

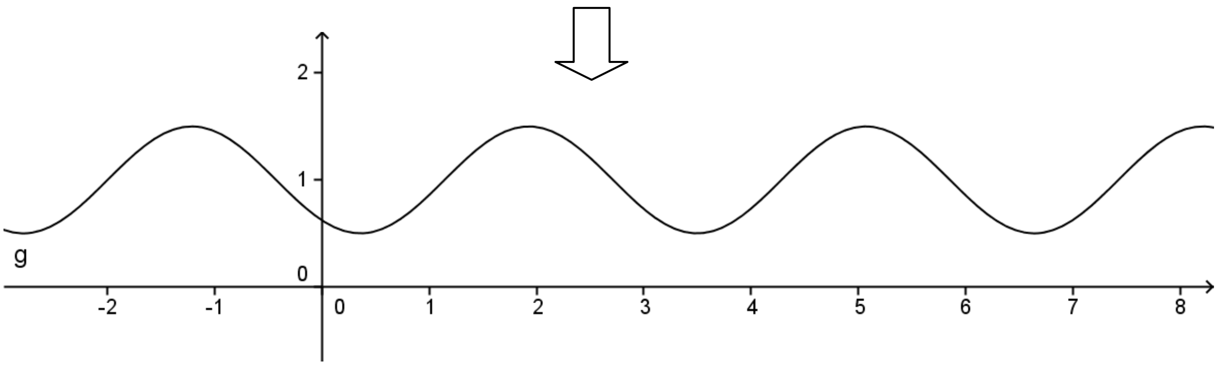
3. Charakteristische Eigenschaften

1. f ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{b}$
2. Symmetrie : $f(x) = \sin(x)$ $\rightarrow$ Punktsymmetrie von G_f zum Ursprung
   $f(x) = \cos(x)$ $\rightarrow$ Achsensymmetrie von G_f zur y-Achse
3. $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

4. Beispiele



Bsp.: $f(x) = 0{,}5\sin(2x + 4) + 1$ Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung $\rightarrow$ Verschiebung um 2 nach links $\rightarrow$ Streckung in y-Richtung mit Faktor 0,5 $\rightarrow$ Verschiebung um 1 nach oben



Exponentialfunktion

1. Allgemeine Form

f: $x \mapsto b \cdot a^x$

2. Charakteristische Eigenschaften

Wachstumsfaktor a: $a > 0$, $a \neq 1$
Anfangswert b für x = 0, also f(0) = b („y-Achsenabschnitt“)

- Fallunterscheidung (für b > 0):
    - Für a < 1 fällt der Graph durchgehend, Bsp: a = 0,95: Prozentuale Abnahme um 5% pro Einheit.
    - Für a > 1 steigt der Graph durchgehend, Bsp: a = 1,05: Prozentuale Zunahme um 5% pro Einheit.
- Spiegelt man den Graphen von $x \mapsto a^x$ an der y-Achse, so erhält man den Graphen von $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ und umgekehrt.
- Der Graph besitzt keine Nullstellen.

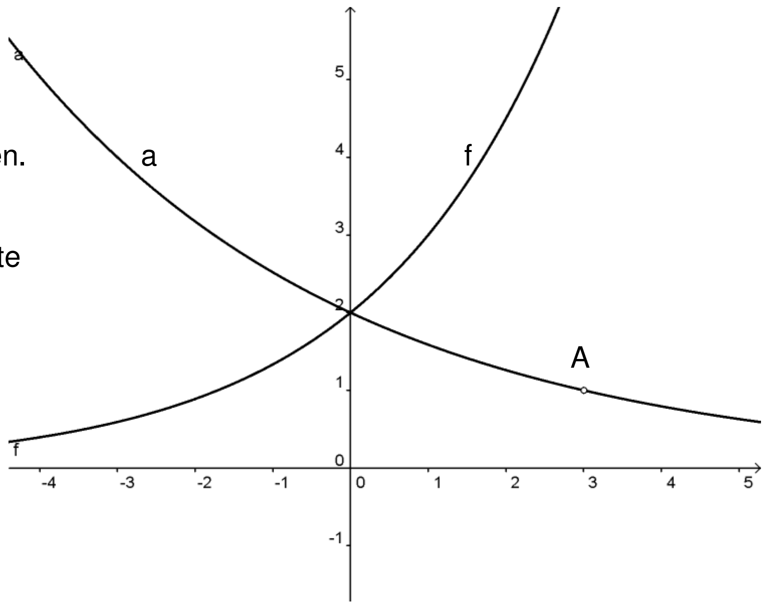
3. Vom Graph zur Funktion

- Faktor b bestimmen (y- Achsenabs.)
  b = 2
- Einen klar erkennbaren Punkt suchen.
  In unserem Beispiel: Punkt A (3/1)

  Gleichung: $b \cdot a^{\text{x-Koordinate}}$ = y-Koordinate
  nach a auflösen (b eingesetzt):

  $2 \cdot a^3 = 1$:2
  $a^3 = 0{,}5$ Wurzel!
  $a = \sqrt[3]{0{,}5}$

  → **a(x) = 2·** $\left(\sqrt[3]{0{,}5}\right)^x$



4. Von der Funktion zum Graph

z.B. $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$

- Y-Achsenabschnitt 2 antragen
- Ausgehend vom y-Achsenabschnitt pro Einheit in x-Richtung Zunahme mit Faktor a

5. Besonderheiten

Nullstellenbestimmung von verschobenen exponentiellen Graphen mithilfe des Logarithmus:

$h(x) = 2 \cdot 1{,}5^{x+1} - 2$

$0 = 2 \cdot 1{,}5^{x+1} - 2$
$1 = 1{,}5^{x+1}$
$x+1 = \log_{1,5}(1)$
$x+1 = 0$
$x = -1$