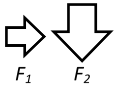
ammersee gymnasium

10^{hoch2}

Grundwissen Mathematik am ASG
9. Jahrgangsstufe, 2. Halbjahr

Ähnlichkeit | 9 | 11

Begründe, dass F_1 und F_2 zueinander **ähnlich** sind.
Gib den **Ähnlichkeitsfaktor** k an und nenne weitere Eigenschaften.
Wie verhalten sich Volumina bei der maßstäblichen Vergrößerung mit Faktor k?
Gib an, worin Dreiecke zumindest übereinstimmen müssen, damit sie ähnlich sind.

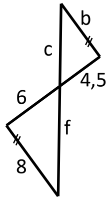


Ähnlichkeit | Lösung

F_1 ist ähnlich zu F_2 ($F_1 \sim F_2$), weil durch **maßstäbliche Vergrößerung** von F_1 mit $k=1{,}5$ eine zu F_2 kongruente Figur entsteht.
Entsprechende Winkel und Streckenverhältnisse stimmen überein, der Flächeninhalt wächst auf das 2,25-Fache.
Das Volumen wächst auf das k^3-Fache.
WW (2 Winkel), S:S:S (Streckenverhältnisse)

Strahlensatz | 9 | 12

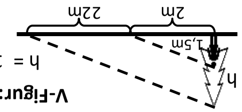
Bestimme für die abgebildete **X-Figur** die Streckenlängen b, c und f, wenn $c + f = 17{,}5$.



Ein Baum wirft einen 22m längeren Schatten als ein 1,50m großes Kind mit 2m langem Schatten. Bestimme die Höhe h des Baums (Skizze!).

Strahlensatz | Lösung

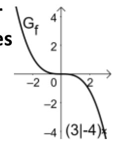
$\frac{4{,}5}{6} = \frac{c}{17{,}5-c} \Leftrightarrow 4{,}5 \cdot (17{,}5-c) = 6c \Leftrightarrow$
$10{,}5c = 78{,}75$, d.h. $c = 7{,}5$; $f = 10$.
$\frac{4{,}5}{6} = \frac{b}{8} \Leftrightarrow 4{,}5 \cdot 8 = 6b$, d.h. $b = 6$.



V-Figur: $\frac{h}{1{,}5m} = \frac{2m+22m}{2m}$
$h = 12 \cdot 1{,}5m = 18m$

Potenzfunktionen | 9 | 13

Gib die **allgemeine Form einer Potenzfunktion n-ten Grades** und einen möglichen Term zum skizzierten Graphen an.



Gib jeweils Symmetrieeigenschaft, Verlauf und Wertemenge für g: $x \mapsto \frac{1}{4}x^7$ und h: $x \mapsto -2x^4$ an. Ermittle die Schnittpunkte von G_g und G_h.

Potenzfunktionen | Lösung

Allgemeine Form: $x \mapsto a \cdot x^n$ ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$);
Abb.: $a \cdot 3^3 = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{27}$; $f(x) = -\frac{4}{27}x^3$.
Für g: $a > 0$, n ungerade $\Rightarrow G_g$ punktsymmetrisch, verläuft von l.u. nach r.o., $W = \mathbb{R}$.
Für h: $a < 0$, n gerade $\Rightarrow G_h$ achsensymmetrisch, verläuft von l.u. nach r.u., $W = \mathbb{R}_0^-$.
$\frac{1}{4}x^7 = -2x^4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 \cdot (x^3+8) = 0 \Leftrightarrow x=0$ od. $x=-2$;
Schnittpunkte: (0|0) und (-2|-32).

Allgemeine Wurzel | 9 | 14

Beschreibe, was man unter der **n-ten Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ einer Zahl $a \geq 0$ versteht, und gib ihre Potenzschreibweise an.
Nenne Beispiele für Potenzgleichungen mit zwei Lösungen, einer bzw. keiner Lösung und bestimme jeweils die Lösungen.
Schreibe möglichst einfach: $\sqrt[6]{27^4}$; $\left(\frac{625}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

Allgemeine Wurzel | Lösung

$\sqrt[n]{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$; Potenzschreibweise: $a^{\frac{1}{n}}$.
$x^4 = 9$: zwei Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{9} = \pm\sqrt{3}$;
$x^3 = -5$ hat als einzige Lösung $x = -\sqrt[3]{5}$;
$x^2 = -1$ besitzt keine Lösung.
$\sqrt[6]{27^4} = 27^{\frac{4}{6}} = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27}^2 = 3^2 = 9$;
$\left(\frac{625}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{5}$.

Rechnen mit allg. Wurzeln | 9 | 15

Vereinfache jeweils so weit wie möglich:

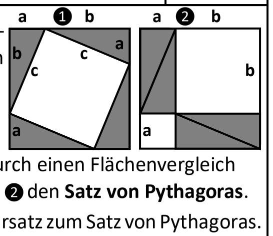
a) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$
b) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$
d) $\sqrt[4]{ab}^5 : \sqrt[4]{ab^7}$
e) $\sqrt[6]{x \cdot \sqrt[5]{x}}$

Rechnen mit allg. Wurzeln | Lösung

a) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3$
b) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = (125^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
d) $\sqrt[4]{ab}^5 : \sqrt[4]{ab^7} = \frac{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{4}}} = a^1 b^{-\frac{2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$
e) $\sqrt[6]{x \cdot \sqrt[5]{x}} = \sqrt[6]{x^1 \cdot x^{1/5}} = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[5]{x}$

Der Satz von Pythagoras | 9 | 16

Die acht Dreiecke in den Figuren ❶ und ❷ sind kongruent.
Beweise durch einen Flächenvergleich von ❶ und ❷ den **Satz von Pythagoras**.
Bilde den Kehrsatz zum Satz von Pythagoras.

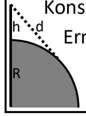


Der Satz von Pythagoras | Lösung

Unter der Voraussetzung, dass die Dreiecke rechtwinklig sind, sind alle Vierecke Quadrate. In ❶ gilt: $A_{ges} = 4 \cdot A_\Delta + c^2$
Im Quadrat ❷ gilt: $A_{ges} = 4 \cdot A_\Delta + a^2 + b^2$
Der Flächenvergleich zeigt $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.
Kehrsatz: Wenn die Seiten eines Dreiecks ABC die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, ist das Dreieck bei C rechtwinklig.

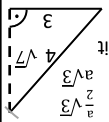
Pythagoras: Anwendungen | 9 | 17

Gib jeweils einen Term für die **Diagonale eines Quadrats**, die **Höhe eines gleichseitigen Dreiecks** und die **Raumdiagonale im Würfel** an (Seitenlänge jeweils a).
Konstruiere eine Strecke mit Länge $\sqrt{7}$.
Ermittle in der Abbildung ($d = 100km$, $R = 6370km$) die Länge von h und gib eine mögliche Bedeutung an.



Pythagoras: Anwendungen | Lösung

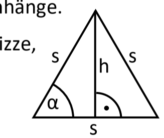
Diagonale im Quadrat: $a\sqrt{2}$
Höhe im gleichseitigen Dreieck: $\frac{a}{2}\sqrt{3}$
Raumdiagonale im Würfel: $a\sqrt{3}$
Mit $7 = 4^2 - 3^2$ erhält man $\sqrt{7}$ mit Pythagoras wie in der Abb.:



$(h+R)^2 = d^2 + R^2 \Rightarrow h = \sqrt{d^2+R^2} - R \approx 785m$ ist z.B. die Höhe eines Bergs, von dem aus die Sicht maximal 100km weit reicht.

Sinus, Kosinus, Tangens | 9 | 18

Gib in Bezug auf rechtwinklige Dreiecke Definitionen für **Sinus, Kosinus und Tangens für $0° \leq \alpha \leq 90°$** an. Formuliere auch deren Zusammenhänge.
Begründe anhand der Skizze, welche Werte sich für cos(60°), sin(60°) und tan(60°) ergeben.



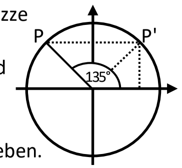
Sinus, Kosinus, Tangens | Lösung

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ | $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ | $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$
$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ | $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$

Gleichseitiges Δ, $\alpha = 60° \Rightarrow \cos(60°) = \frac{\frac{s}{2}}{s} = \frac{1}{2}$
$\sin(60°) = \frac{h}{s} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{3}}{s} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan(60°) = \frac{h}{\frac{s}{2}} = \sqrt{3}$

Sinus/Kosinus am Einheitskreis | 9 | 19

Beschreibe, wie **Sinus und Kosinus für Winkel $\alpha \in [0°; 360°]$** definiert sind.
Mache anhand der Skizze plausibel, welche Werte cos(135°) und sin(135°) haben.
Gib an, wann sich negative Werte ergeben.

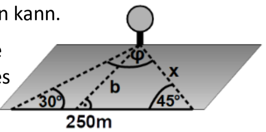


Sinus/Kosinus am Einheitskreis | Lösung

Die Halbgerade, die mit der positiven x-Achse den Winkel α bildet, schneidet den **Einheitskreis** im Punkt $P(x_P|y_P)$.
Dann gilt: $\cos(\alpha) = x_P$ und $\sin(\alpha) = y_P$.
$x_P = -x_{P'} \Rightarrow \cos(135°) = -\cos(45°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$y_P = y_{P'} \Rightarrow \sin(135°) = \sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha \in]180°;360°[$ (III., IV. Quadr.)
$\cos(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha \in]90°;270°[$ (II.,III. Quadr.)

Sinus- und Kosinussatz | 9 | 20

Erkläre für verschiedene Fälle, wie von drei gegebenen Größen **eines beliebigen Dreiecks** auf weitere Größen geschlossen werden kann.
Berechne die Breite b des Flusses.



Sinus- und Kosinussatz | Lösung

In den Situationen SWS und SSS hilft der **Kosinussatz:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$.
In den Situationen SsW, SWW und WSW hilft der **Sinussatz:** $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
$\varphi = 180° - 30° - 45° = 105°$ (Winkelsumme)
Sinussatz: $\frac{x}{\sin(30°)} = \frac{250m}{\sin(105°)} \Rightarrow x = 129{,}4\ldots m$
$\sin(45°) = \frac{b}{x} \Rightarrow b = x \cdot \sin(45°) \approx 91{,}5m$