ammersee gymnasium

10^{hoch2} Grundwissen Mathematik am ASG
9. Jahrgangsstufe, 1. Halbjahr

Wurzelbegriff und Menge ℝ — 9 | 01

Gib die rechnerische und eine geometrische Bedeutung von $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) an.

Begründe durch einen **indirekten Beweis**, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Gib weitere **irrationale Zahlen** an, also Zahlen, die nicht in ℚ, aber in der **Menge ℝ der reellen Zahlen** enthalten sind.

Wurzelbegriff und Menge ℝ — Lösung

$\sqrt{a}$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$, also die Seitenlänge eines Quadrats mit Flächeninhalt a.

Falls $\sqrt{2} \in ℚ$, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (p, q ∈ ℕ) gelten würde, wäre $2q^2 = p^2$. Den Primfaktor 2 gäbe es links in ungerader, rechts in gerader Anzahl. Widerspruch ⇒ $\sqrt{2} \notin ℚ$.

ℝ\ℚ enthält z.B. $-\sqrt{0{,}3}$; π; 1,010010001…

Rechnen mit Wurzeln, Teil 1 — 9 | 02

Erläutere anhand eines Beispiels das **teilweise Radizieren**.

Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$

b) $\sqrt{45} : \sqrt{20}$

c) $(\sqrt{5} - 2)^2$

Begründe, dass $\sqrt{x^2} = x$ nicht allgemeingültig ist und berichtige die Gleichung.

Rechnen mit Wurzeln, Teil 1 — Lösung

Man faktorisiert den **Radikanden** und zieht die Wurzel aus quadratischen Faktoren, z.B. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

b) $\sqrt{45} : \sqrt{20} = \sqrt{45 : 20} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

c) $(\sqrt{5} - 2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$

Gegenbsp.: $\sqrt{(-2)^2} = +2$. Richtig: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Rechnen mit Wurzeln, Teil 2 — 9 | 03

Gib zwei Beispiele für das **Rationalmachen des Nenners** an, u.a. mit einer Summe irrationaler Zahlen im Nenner.

Vereinfache jeweils so weit wie möglich:

a) $\sqrt{\frac{a^4}{2b}} : \sqrt{\frac{a^2}{72b}}$ $(b > 0)$ b) $\sqrt{p^2 - 6p + 9}$

c) $\frac{6x}{\sqrt{2x}} - \sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{12}$ $(x > 0)$

Rechnen mit Wurzeln, Teil 2 — Lösung

Erweitere geschickt: $\frac{14}{\sqrt{7}} = \frac{14\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{14\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \sqrt{6} - 2$.

a) $\sqrt{\frac{a^4}{2b}} : \sqrt{\frac{a^2}{72b}} = \sqrt{\frac{a^4}{2b} \cdot \frac{72b}{a^2}} = \sqrt{36a^2} = 6 \cdot |a|$

b) $\sqrt{p^2 - 6p + 9} = \sqrt{(p-3)^2} = |p - 3|$

c) $\frac{6x}{\sqrt{2x}} - \sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{12} = \frac{6x \cdot \sqrt{2x}}{2x} - \sqrt{8x} = \sqrt{2x}$

Scheitelpunktform — 9 | 04

Beschreibe den Graphen G_f einer Funktion **f: x ↦ a · (x + d)² + e (Scheitelpunktform)** mit D = ℝ und a ≠ 0.

Ermittle für die in ℝ definierte Funktion p mit $p(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 2)^2 - 1$ und Graph G_p das **Steigungsverhalten** von G_p, sowie **Wertemenge** und **Nullstellen** von p.

Scheitelpunktform — Lösung

G_f ist eine **Parabel** mit **Scheitelpunkt** (-d|e); für a > 0 nach oben, für a < 0 nach unten geöffnet; für |a| > 1 enger, für |a| < 1 weiter als die **Normalparabel** (x ↦ x²).

Scheitelpunkt (2|–1), a > 0 ⇒ G_p für x ≤ 2 fallend, für x ≥ 2 steigend ⇒ W_p = [-1; ∞[.

$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow |x - 2| = 2 \Leftrightarrow (x - 2) = \pm 2$ ⇒ Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Quadratische Gleichungen — 9 | 05

Gib die **Lösungsformel für quadratische Gleichungen** an. Beschreibe, wie man die Anzahl der Lösungen ermitteln kann.

Löse die folgenden Gleichungen geschickt:

a) **reinquadratisch**: 3x² – 9 = 0

b) **ohne Konstante**: x² – 4x = 0

c) **allgemeiner Fall**: 2x² – 8x + 6 = 0

Quadratische Gleichungen — Lösung

Die Lösungen von ax² + bx + c = 0 lauten $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; Anzahl der Lösungen je nach **Diskriminante** D = b² – 4ac: für D > 0 zwei, für D = 0 eine, für D < 0 keine.

a) $3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

b) Ausklammern: $x \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$

c) $x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64-4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3$

Formen quadratischer Fkt. — 9 | 06

Die Flugbahn eines Basketballs wird näherungsweise durch den Graphen der Fkt. f: x ↦ -0,2x² + 0,8x + 2,4 modelliert (Abwurf bei x = 0; 1LE entspricht 1m).

Wandle die **allgemeine Form** von f(x) in die **Nullstellenform** und **Scheitelpunktform** um und gib Eigenschaften der Flugbahn an, die sich daraus ergeben.

Formen quadratischer Fkt. — Lösung

Nst.: $x_{1,2} = \frac{-0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2 - 4 \cdot (-0{,}2) \cdot 2{,}4}}{2 \cdot (-0{,}2)} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 6$

Nullstellenform: f(x) = -0,2 · (x + 2) (x – 6)

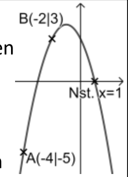
Die x-Koordinate des Scheitels liegt mittig zwischen den Nst.: x_S = (-2 + 6) : 2 = 2

Aus f(2) = 3,2 erhält man S(2|3,2) und die **Scheitelpunktform**: f(x) = -0,2·(x–2)² + 3,2.

Der Ball erreicht nach 2m die max. Höhe 3,2m und landet nach insgesamt 6m.

System aus drei Gleichungen — 9 | 07

Eine Parabel (vgl. Abb.) verläuft durch die angegebenen Punkte. Bestimme einen passenden Funktionsterm p(x) = ax² + bx + c.



Kommentiere dabei, wie man ein **lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen** allgemein lösen kann.

System aus drei Gleichungen — Lösung

p(-4) = -5 ⇔ (I) 16a – 4b + c = -5

p(-2) = 3 ⇔ (II) 4a – 2b + c = 3

p(1) = 0 ⇔ (III) a + b + c = 0

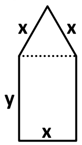
Eine Gleichung nach c auflösen, z.B. aus (III): c = –a – b, und in die anderen einsetzen: (I') 15a – 5b = -5, (II') 3a – 3b = 3

Lösen wie in **8 | 17** ergibt: a = -1, b = -2, c = 3

Der gesuchte Term ist: p(x) = –x² – 2x + 3.

Extremwertproblem — 9 | 08

Die dargestellte Figur ist aus einem gleichseitigen Dreieck und einem Rechteck zusammengesetzt. Es besitzt einen Umfang von 24m. Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks den **größtmöglichen Wert** annimmt und erläutere deine Lösungsschritte.



Extremwertproblem — Lösung

1. Term für den Flächeninhalt: A(x, y) = x · y
2. Nebenbedingung (Beziehung zwischen x und y): 3x + 2y = 24 ⇔ y = 12 – 1,5x
3. Funktionsterm für die gesuchte Größe: A(x) = x · (12 – 1,5x), hat Nst. $x_1 = 0$, $x_2 = 8$
4. Scheitelpunkt bestimmen: x_S = (0+8):2 = 4 ⇒ S(4|24); Parabel nach unten geöffnet. ⇒ Für x = 4m: max. Flächeninhalt 24m².

Verknüpfte Ereignisse — 9 | 09

Ein zufällig bestimmter Deutscher ist mit 8% Wahrscheinlichkeit „häufiger Flugreisender“ (Ereignis F), mit 12% Vegetarier (Ereignis V) und mit 81% weder noch. Erstelle die passende **Vierfeldertafel** mit formalen Schreibweisen und Werten.

Formuliere in Worten und gib an:

a) $P(V \cap F)$ b) $P(\overline{V} \cap F)$ c) $P(V \cup \overline{F})$

Verknüpfte Ereignisse — Lösung

	F	$\overline{F}$	
V	$P(V \cap F) = 1\%$	$P(V \cap \overline{F}) = 11\%$	$P(V) = 12\%$
$\overline{V}$	$P(\overline{V} \cap F) = 7\%$	$P(\overline{V} \cap \overline{F}) = 81\%$	$P(\overline{V}) = 88\%$
	$P(F) = 8\%$	$P(\overline{F}) = 92\%$	$P(Ω) = 100\%$

Die Wahrscheinlichk., dass ein Deutscher …

a) Vegetarier ist und häufig fliegt: 1%

b) oft fliegt, aber kein Vegetarier ist: 7%

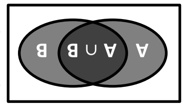
c) Vegetarier ist oder nicht oft fliegt: 93%

Vereinigungsmenge — 9 | 10

Mache anhand eines Mengendiagramms plausibel, wie man die **Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge** zweier Ereignisse A und B bestimmen kann.

60% der Neuntklässler besitzen ein Tablet, 45% einen Laptop und 10% sogar beide Geräte. Wie viele Neuntklässler besitzen mindestens eines der Geräte?

Vereinigungsmenge — Lösung



A ∪ B ist der graue Bereich. Er ist durch A und B abgedeckt, wobei die Schnittmenge nicht doppelt gezählt werden darf:

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

P('mindestens eines der Geräte') = P(T∪L) = P(T) + P(L) – P(T∩L) = 60% + 45% – 10% = 95%