ammersee gymnasium

10^{hoch2}

Grundwissen Mathematik am ASG
7. Jahrgangsstufe, 1. Halbjahr

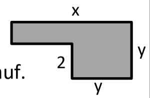
Terme mit Variablen | 7 | 01

Welcher **Term** passt zur **Wertetabelle**?

x	0	1	2	3
T(x)	10	11	14	19

Eine 12cm lange Kerze brennt jede Stunde um 2cm ab. Gib einen Term L(t) für die Länge (in cm) nach t Stunden an.

Stelle Terme u(x; y) und A(x; y) für Umfang und Flächeninhalt der Figur auf.



Terme mit Variablen – Lösung

Zur Wertetabelle passt z.B. $T(x) = 10 + x^2$.

Die Länge der Kerze (in cm) in Abhängigkeit der Zeit t in Stunden kann für $0 \le t \le 6$ durch $L(t) = 12 - 2t$ angegeben werden.

$u(x; y) = x + y + y + 2 + (x - y) + (y - 2) = 2x + 2y$

$A(x; y) = y \cdot y + (x - y) \cdot (y - 2) = xy - 2x + 2y$

Termwerte und Äquivalenz | 7 | 02

Berechne für $T(x) = 2:(3 - x) - x:2$ die **Termwerte** zu $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$ und veranschauliche die **Wertepaare** im KOSY.

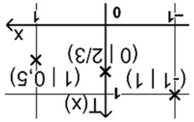
Fülle für $A(x) = x^3 - 4x$ und $B(x) = -2x + x^2$ die Wertetabelle aus.

x	−1	0	2
A(x)			
B(x)			

Begründe, ob A(x) und B(x) **äquivalent** sind.

Termwerte und Äquivalenz – Lösung

$T(-1) = 2:4 + 1:2 = 1$
$T(0) = 2:3 - 0:2 = 2/3$
$T(1) = 2:2 - 1:2 = 1/2$



x	−1	0	2
A(x)	3	0	0
B(x)	3	0	0

Trotzdem sind A(x) und B(x) nicht äquivalent, weil z.B. $A(1) = -3 \neq B(1) = -1$

Produkte und Potenzen | 7 | 03

Fasse jeweils zu einem Produkt der Form „Vorzeichen · Zahl · Variablenpotenzen" zusammen:

a) $a^2 \cdot a \cdot (-a)^3$
b) $5xy \cdot (-2 \cdot x \cdot y^2) \cdot 7x^3y$
c) $(-3n^2)^2 \cdot (2n)^3$

Erkläre anhand eines Beispiels, wie man die Potenz einer Potenz vereinfacht.

Produkte und Potenzen – Lösung

a) $a^2 \cdot a \cdot (-a)^3 = (a \cdot a) \cdot a \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^6$
b) $5xy \cdot (-2 \cdot x \cdot y^2) \cdot 7x^3y = -70x^5y^4$
c) $(-3n^2)^2 \cdot (2n)^3 = (-3n^2) \cdot (-3n^2) \cdot 2n \cdot 2n \cdot 2n = 72n^7$

Anhand von $(b^2)^3 = b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = b^6$ erkennt man, dass man die Potenz einer Potenz berechnet, indem man die Basis beibehält und die Exponenten multipliziert.

Summen von Produkten | 7 | 04

Beschreibe, was man unter **gleichartigen Termen** versteht und wie man Summen von gleichartigen Termen berechnet.

Berechne:
a) $3k^2 + 5k^2 + 2k$
b) $y^2 \cdot (-4x) - 3x \cdot (2y)^2 + 5y \cdot xy$

Summen von Produkten – Lösung

Zwei Produkte sind **gleichartig**, wenn sie die gleichen Variablen in jeweils gleicher Potenz enthalten. Man addiert sie, indem man die **Koeffizienten** addiert und die Variablen beibehält.

a) $3k^2 + 5k^2 + 2k = 8k^2 + 2k$
b) $y^2 \cdot (-4x) - 3x \cdot (2y)^2 + 5y \cdot xy = -4xy^2 - 12xy^2 + 5xy^2 = -11xy^2$

Produkte mit Summen | 7 | 05

Multipliziere aus: $a \cdot (3b + 4a)$
Schreibe als Summe: $(5z - 7y) \cdot (-4x)$

Klammere aus (Faktorisiere): $x^2y + xy^2$
Schreibe als Produkt: $6c^2d - 18c^3d$

Wie behandelt man **"Minusklammern"**?
Schreibe klammerfrei und vereinfache: $3x - (-4x + y)$

Produkte mit Summen – Lösung

Nach dem **Distributivgesetz (5|13)** gilt:
$a \cdot (3b + 4a) = 3ab + 4a^2$
$(5z - 7y) \cdot (-4x) = -20xz + 28xy$
$x^2y + xy^2 = xy \cdot (x + y)$
$6c^2d - 18c^3d = 6c^2d \cdot (1 - 3c)$

Bei einer **"Minusklammer"** muss man alle Vorzeichen in der Klammer ändern.
$3x - (-4x + y) = 3x + 4x - y = 7x - y$

Produkte von Summen | 7 | 06

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich: $(s - t) \cdot (-3t + 4s)$

Wie lauten die **binomischen Formeln?**

Multipliziere jeweils aus:
$(1{,}5v - 0{,}3) \cdot (1{,}5v + 0{,}3)$
$(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}y)^2$

Produkte von Summen – Lösung

$(s-t) \cdot (-3t+4s) = s \cdot (-3t) + s \cdot 4s - t \cdot (-3t) - t \cdot 4s = -3st + 4s^2 + 3t^2 - 4st = 4s^2 + 3t^2 - 7st$

Binomische Formeln:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(1{,}5v - 0{,}3) \cdot (1{,}5v + 0{,}3) = 2{,}25v^2 - 0{,}09$
$(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}y)^2 = \frac{4}{9}x^4 - x^2y + \frac{9}{16}y^2$

Argumentieren mit Termen | 7 | 07

Begründe, indem du jeweils einen Term aufstellst und diesen vereinfachst:

a) Kann die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen gerade sein?

b) Um wie viel Prozent ändert sich das Volumen eines Würfels, wenn die Kantenlänge halbiert wird?

Argumentieren mit Termen – Lösung

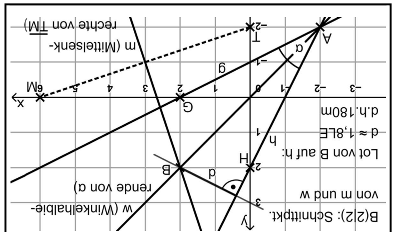
a) Differenz benachbarter Quadratzahlen: $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
Sie ist immer ungerade (da 2n gerade).

b) Volumen eines Würfels: $V = a^3$
Nach der Halbierung der Kantenlänge: $V_{neu} = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 = \frac{1}{8}a^3 = \frac{1}{8}V$. Das Volumen nimmt also um $7/8 = 87{,}5\%$ ab.

Symmetrieachsen und Lote | 7 | 08

Tim und Max bauen ein Baumhaus, das von zwei Straßen g = [AG und h = [AH den gleichen Abstand hat. Es ist gleich weit von ihren Elternhäusern T und M entfernt. In einem KOSY mit 1LE ≙ 100m sind A(-2|-2), G(2|0), H(0|2), T(0|-2), M(6|0) gegeben. Ermittle die Koordinaten des Baumhauses B und dessen Abstand zu den Straßen in m.

Symmetrieachsen und Lote – Lösung



Symmetrische Vierecke | 7 | 09

Gib für jeden der achsensymmetrischen Viereckstypen an, wie viele und welche Symmetrieachsen er besitzen muss.

Benenne die Menge der punktsymmetrischen Vierecke und gib Spezialfälle an, die zu dieser Menge gehören.

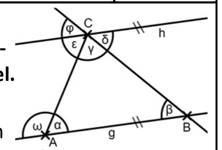
Symmetrische Vierecke – Lösung

Quadrat: 4 (2 Mittelsenkr., 2 Diagonalen)
Rechteck: 2 (Mittelsenkrechten)
Raute: 2 (Diagonalen)
Achsensymmetr. Trapez: 1 (Mittelsenkr.)
Drachenviereck: 1 (Diagonale)

Punktsymmetrisch: Alle Parallelogramme (und damit auch die Spezialfälle Raute, Rechteck und Quadrat)

Winkelzusammenhänge | 7 | 10

Suche in der Abb. **Neben-**, **Scheitel-** und **Stufenwinkel.** Was gilt für sie?



Begründe, wie man aus ω = 120° die Größe von ε ermittelt.

Erläutere anhand der Abb., dass jedes ΔABC eine **Winkelsumme** von 180° hat.

Winkelzusammenhänge – Lösung

Nebenwinkel: α, ω. Es gilt: α + ω = 180°.
Scheitelwinkel: δ, φ. Es gilt: δ = φ.
Stufenwinkel: β, φ. g ∥ h ⇒ β = φ.
ω = 120° ⇒ α = 180° − ω = 60° (Nebenwinkel), g ∥ h ⇒ ε = α = 60° (**Wechselwinkel**).
α und ε bzw. β und δ sind Wechselwinkel und wegen g ∥ h jeweils gleich groß ⇒ α + β + γ = ε + δ + γ = 180° (gestr. Winkel)