ammersee gymnasium

10^{hoch2}

Grundwissen Mathematik am ASG
8. Jahrgangsstufe, 1. Halbjahr

Der Funktionsbegriff | 8 | 01

Beschreibe, was man unter einer **Funktion**, ihrer **Definitionsmenge D_f** und ihrer **Wertemenge W_f** versteht.

Gib zur Funktion p mit dem **Funktionsterm** $p(x) = x^2 - 1$ und $D_p = \mathbb{Q}$ die Wertemenge W_p an, und begründe, ob die Punkte $S(-1|1)$ und $T(2|2)$ auf, über oder unter dem **Graphen G_p** von p liegen.

Lineare Funktionen | 8 | 02

Erkläre die Bedeutung der **Parameter** m und t in der **allg. Funktionsgleichung** y = **m**x + **t** einer **linearen Funktion**.

Zeichne den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f\colon y = -\frac{3}{2}x + 4$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Berechne die **Nullstelle** von f.

Aufstellen einer linearen Fkt. | 8 | 03

Eine Kerze brennt gleichmäßig ab. Sie ist 2h nach dem Anzünden noch 5cm lang und nach weiteren 4h abgebrannt.

Stelle den passenden **Funktionsterm** der Funktion f: *Zeit x in h ↦ Länge in cm* auf und berechne die ursprüngliche Länge der Kerze.

Schnittpunkte, Ungleichungen | 8 | 04

Erkläre, wie viele Schnittpunkte (SP) die Graphen von zwei linearen Funktionen f und g haben können.

Berechne den Schnittpunkt S der durch die linearen Funktionsterme $f(x) = -3x + 1$ und $g(x) = -2x$ gegebenen Geraden.

Worauf muss man speziell beim Lösen von **Ungleichungen** achten? Löse $f(x) \leq g(x)$.

Direkte Proportionalität | 8 | 05

Nenne drei Kriterien für die **direkte Proportionalität** zweier Größen x und y.

Von den **direkt proportionalen** Größen x und y sind folgende Werte bekannt:

x in ℓ	a	0,75	2,5
y in €	0,7	b	3,5

Gib den **Proportionalitätsfaktor** m und seine Bedeutung sowie die Zuordnungsvorschrift an. Bestimme a und b.

Der Funktionsbegriff | Lösung

Eine **Funktion** f: x ↦ y ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu. **D_f** ist die Menge aller zulässigen x-Werte, **W_f** die Menge aller y-Werte (**Funktionswerte**).

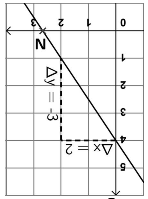
$W_p = [-1; \infty[$; Wegen $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$ und $p(2) = 2^2 - 1 = 3$ liegen $(-1|0)$ und $(2|3)$ auf dem Graphen von p. Daher liegt S über G_p und Q unter G_p.

Lineare Funktionen | Lösung

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: **Steigung** der zugehörigen **Geraden**
für m = 0: waagrecht,
für m < 0: fallend,
für m > 0: steigend.

t: y-Achsenabschnitt, (0|t) ist Schnittpunkt mit der y-Achse.

Nst.: $-\frac{3}{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$



Aufstellen einer linearen Fkt. | Lösung

Gegebene **Wertepaare**: $P_1(2|5)$, $P_2(6|0)$

❶ Steigung: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-5}{6-2} = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + t$ ❷ Einsetzen von P_1:

$5 = -\frac{5}{4} \cdot 2 + t \Leftrightarrow t = 7{,}5$

$\Rightarrow$ Funktionsterm $f(x) = -\frac{5}{4}x + 7{,}5$

Die ursprüngliche Länge der Kerze ergibt sich aus f(0) = 7,5. Sie beträgt also 7,5cm.

Schnittpunkte, Ungleichungen | Lösung

Die Graphen von f und g sind Geraden: Sie können übereinstimmen (∞ viele SP), sich in einem SP schneiden oder parallel liegen (gleiche Steigung, kein SP).

Terme gleichsetzen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

Lösung für x **einsetzen**: $f(1) = -2 \Rightarrow S(1|-2)$

Mult./Division mit neg. Zahl dreht ≤ um!

$-3x + 1 \leq -2x \Leftrightarrow -x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow L = [1; +\infty[$

Direkte Proportionalität | Lösung

Jedem **k-fachen** Wert von x wird der **k-fache** Wert von y zugeordnet; die Wertepaare sind **quotientengleich;** der Graph ist eine **Ursprungsgerade.**

$m = \frac{y}{x} = \frac{3{,}5\,€}{2{,}5\,\ell} = 1{,}4\frac{€}{\ell}$ (Preis pro Liter)

$x \longmapsto y = 1{,}4\frac{€}{\ell} \cdot x$ (x: Volumen; y: Preis)

$\frac{3{,}5}{0{,}7} = \frac{2{,}5}{a} \Leftrightarrow a = 0{,}5$; $b = 1{,}4 \cdot 0{,}75 = 1{,}05$;

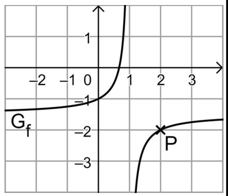
Gebrochen-rationale Funktion | 8 | 06

Gib für den Graphen G_f der **gebrochen-rationalen Funktion** f: $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ mit $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{-2\}$ zwei Geraden an, denen er sich beliebig nahe annähert. Berechne, wo G_f die Koordinatenachsen schneidet.

Gib an, wie G_f aus der zu $x \mapsto \frac{1}{x}$ gehörigen **Hyperbel** G_h hervorgeht und zeichne G_f.

Funktionsterm einer Hyperbel | 8 | 07

Gib den zu einer **Hyperbel** passenden **allg. Funktionsterm** an. Ermittle dann den zum dargestellten Graphen G_f passenden Funktionsterm.



Indirekte Proportionalität | 8 | 08

Nenne drei Kriterien für die **indirekte Proportionalität** zweier Größen x und y.

Für die Klassenzimmer einer Schule benötigen drei Reinigungskräfte sechs Stunden. Bestimme mithilfe eines Funktionsterms die Zeit, die vier Reinigungskräfte bräuchten.

Bruchterme addieren | 8 | 09

Beschreibe, wie man Bruchterme addiert. Begründe, dass man sie vorher oft kürzen und/oder erweitern muss.

Berechne:

$$\frac{3}{9-6x} - \frac{2x}{x^2}$$

Bruchterme multiplizieren | 8 | 10

Beschreibe, wie man zwei Bruchterme multipliziert bzw. dividiert.

Berechne und vereinfache möglichst weit:

$$\frac{7b - 14a}{42b} : \frac{2a^2 - ab}{6ab}$$

Gebrochen-rationale Funktion | Lösung

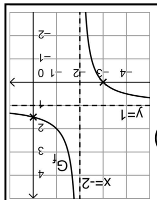
Waagrechte und senkrechte Asymptote von G_f: y = 1 und x = −2

Schnittpunkt mit der ...

y-Achse: $f(0) = 1{,}5 \Rightarrow (0|1{,}5)$

x-Achse: $\frac{1}{x+2} + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$x + 2 = -1 \Rightarrow (-3|0)$

G_h um 1 nach oben und 2 nach links verschieben:



Funktionsterm einer Hyperbel | Lösung

Allgemeiner Term einer **elementaren gebrochen-rationalen Funktion:**

$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ mit a, b, c ∈ $\mathbb{Q}$

Waagrechte Asymptote y = −1,5 ⇔ c = −1,5

Senkrechte Asymptote x = 1 ⇔ b = −1

Graphenpunkt, z.B. P(2|−2), einsetzen:

$f(2) = \frac{a}{2-1} - 1{,}5 = -2 \Leftrightarrow a = -0{,}5$

Gesuchter Term: $f(x) = \frac{-0{,}5}{x-1} - 1{,}5$; $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$

Indirekte Proportionalität | Lösung

Jedem **k-fachen** Wert von x wird der **$\frac{1}{k}$-fache** Wert von y zugeordnet; die Wertepaare sind **produktgleich;** der Graph ist eine **Hyperbel.**

Produktwert (Gesamtzeit): 3 · 6h = 18h

Zeit in Abhängigkeit der Anz. n der Kräfte:

$t(n) = \frac{18h}{n}$; somit: $t(4) = \frac{18h}{4} = 4{,}5h$.

Bruchterme addieren | Lösung

Bruchterme mit gleichen Nennern werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält. Sonst muss man sie vorher durch Kürzen / Erweitern auf den **Hauptnenner** bringen.

$\frac{3}{9-6x} - \frac{2x}{x^2} = \frac{3}{3\cdot(3-2x)} - \frac{2\cdot x}{x\cdot x} = \frac{1}{3-2x} - \frac{2}{x} = \frac{x}{(3-2x)\cdot x} - \frac{2\cdot(3-2x)}{x\cdot(3-2x)} = \frac{x-2\cdot(3-2x)}{(3-2x)\cdot x} = \frac{5x-6}{3x-2x^2}$

Bruchterme multiplizieren | Lösung

Zwei Bruchterme werden **multipliziert,** indem man jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert. Durch einen Bruchterm wird **dividiert,** indem man mit dessen **Kehrbruchterm** multipliziert.

$\frac{7b-14a}{42b} : \frac{2a^2-ab}{6ab} = \frac{7b-14}{42b} \cdot \frac{6ab}{2a^2-ab} = \frac{7\cdot(b-2a)\cdot 6ab}{42b\cdot a\cdot(2a-b)} = \frac{b-2a}{2a-b} = \frac{-(-b+2a)}{2a-b} = -1$